CENTRO EDUCACIONAL
LEONARDO DA VINCI

Fractais

Turma: 2ºD

Unidade: Norte

Nomes: Filipe Barnes, Jefferson Chaurais, Leonardo Marques.

Conteúdo a ser abordado

Temos um mundo a nossa volta, onde tudo nos parece perfeito, logo há uma busca incansável pela tentativa de descoberta desses mecanismos e regras. Mas nem sempre é possível expressá-las através de uma linguagem verbal, então utilizamo-nos de uma linguagem abstrata e conceitual, a matemática. Por meio dessa, podemos modelar, expressar e entender o funcionamento das leis supremas da mãe natureza.

Uma dessas tentativas são os fractais que através de figuras geométricas e conceitos simples aproximam-se, inacreditavelmente, da realidade.

Introdução

Os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. Mandelbrot constatou ainda que todas estas formas e padrões possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza.

Fractais

Nos últimos anos, diferentes definições de fractais têm surgido. No entanto, a noção que serviu de fio condutor a todas as definições foi introduzida por Benoît_Mandelbrot através do neologismo "Fractal", que surgiu do latino *fractus,* que significa irregular ou quebrado, como ele próprio disse: "Eu cunhei a palavra fractal do adjetivo em latim fractus". O verbo em latim correspondente *frangere* significa quebrar: criar fragmentos irregulares é, contudo sabido – e como isto é apropriado para os nossos propósitos – que, além de significar quebrado ou partido, *fractus* também significa irregular. Os dois significados estão preservados em "fragmento".

Um fractal é gerado a partir de uma fórmula matemática, muitas vezes simples, mas que aplicada de forma interativa produz resultados fascinantes e impressionantes.

Uma 1ª definição, pelo próprio Mandelbrot, diz que: "Um conjunto é dito fractal se a dimensão Hausdorff[1] deste conjunto for maior do que a sua dimensão topológica". Contudo, no decorrer do tempo ficou bastante claro que esta definição era muito restrita, embora apresentasse algumas motivações pertinentes.

Existem duas categorias de fractais: os geométricos, que repetem continuamente um modelo padrão e os aleatórios, que são feitos através dos computadores.

A Teoria dos Fractais é também conhecida por "Teoria do Caos". Compreendendo sistemas dinâmicos caóticos. Algumas pessoas chegam a comentar que a imperfeição seria a realidade e os fractais uma visão da perfeição.

Além de se apresentarem como formas geométricas, os fractais representam funções reais ou complexas e apresentam determinadas características: auto-semelhança, a dimensionalidade e a complexidade infinita.

Uma figura é auto-semelhante se uma parte dela é semelhante a toda a figura. Podemos observar esta característica na curva de Koch².

1- **Dimensão Hausdorff:**

A dimensão fractal de um objeto mede o seu grau de irregularidade, a estrutura e o comportamento, quer se trate de uma figura ou de um fenômeno físico, biológico ou social. Consideramos que:

- Um ponto possui dimensão zero;

- Uma linha reta, dimensão um;

- Uma superfície plana, dimensão dois;

- Um sólido, dimensão três.

Os fractais têm dimensões diferentes e próprias de cada imagem.

Uma curva irregular tem dimensão entre um e dois, enquanto uma superfície irregular tem dimensões entre dois e três.

COMO SE CALCULA A DIMENSÃO DE HAUSDORFF?

Uma linha pode ser dividida em n partes iguais ($n=n^1$), logo o tamanho de cada fragmento da reta é 1/n, um quadrado pode ser dividido em n^2 partes iguais, um cubo pode ser dividido em n^3 iguais e um hipercubo divide-se em n^n partes iguais.

Nestes casos da Geometria tradicional a dimensão é igual ao valor do expoente de n. Isto acabará por levar a N=(L/n)^-d, em que L é o comprimento de uma linha, n é o número de partes em que a linha é dividida na iteração p da construção do fractal e N é o comprimento do segmento na iteração p da construção do fractal, em que p é um número natural qualquer.

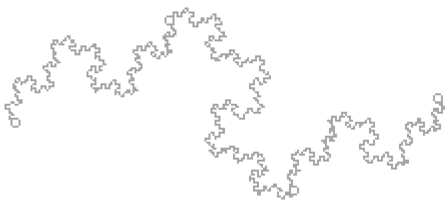
Aplicando o logaritmo a ambos os membros, obtemos a fórmula:

$$d = \frac{\log\left(L/n\right)}{\log N}$$

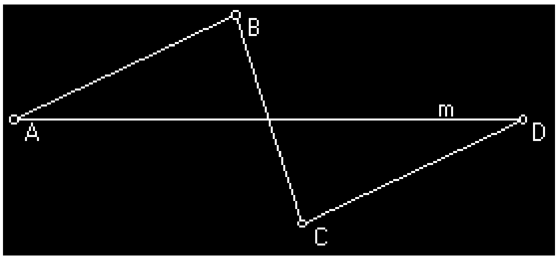
A “d” chama-se dimensão de Hausdorff ou dimensão de fractal.

Exemplo:

Consideremos o seguinte fractal:



A construção deste fractal faz-se do seguinte modo:



Dado um segmento m (de tamanho 1), constroem-se 3 outros segmentos com metade do tamanho do segmento original m e apaga-se o segmento m.

Na iteração seguinte, repete-se o passo 1, mas com o segmento AB em vez de m, com os segmentos BC e CD em vez de m.

Nas iterações seguintes repete-se o passo 2 com os segmentos resultantes da iteração anterior.

Pela definição de dimensão definida anteriormente,

L = 1

N = (1/2)p

n = 3p

Portanto,

2 – Curva de Koch

A curva de Koch foi apresentada pelo matemático sueco Helge von Koch, em 1904, construindo-a a partir de um segmento de reta.

Construção da Curva de von Koch:

Divide-se esse segmento em três partes iguais.

Substitui-se o segmento médio por dois segmentos iguais, de modo a que, o segmento e médio e os dois novos segmentos formem um triângulo eqüilátero.

Obteve-se uma linha poligonal com quatro segmentos de comprimento igual.

Posteriormente, repetem-se os passos 1 - 3 para cada um dos segmentos obtidos.

Obtém-se assim, no limite de iterações, uma curva que pode ser considerada como um modelo simplificado de uma costa, no entanto, quando comparada com a última, esta curva tem uma irregularidade demasiado sistemática.

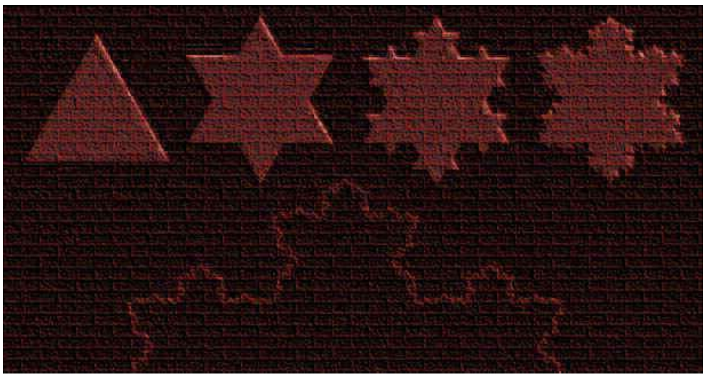
Tal como uma costa, a curva de von Koch tem um comprimento infinito.

Esta curva deu origem a um outro fractal, conhecido como floco de neve ou ilha de von Koch (modelo rudimentar da costa de uma ilha e muito semelhante a um floco de neve).

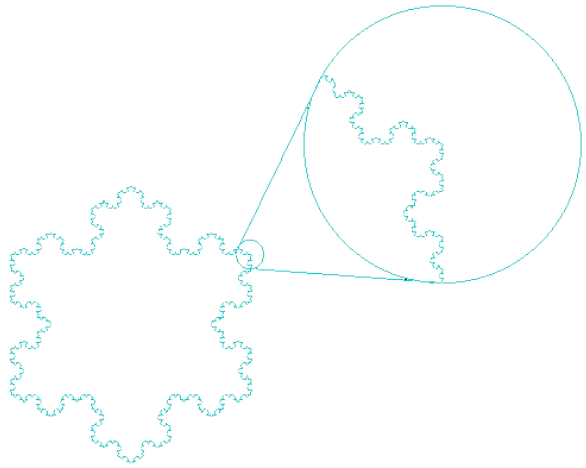
Este último modelo é construído partindo de um triângulo eqüilátero.

Construção da Ilha de von Koch:

Constrói-se a curva de von Koch em cada aresta das três do triângulo.



Quanto à auto-semelhança, o modo de construção da curva de von Koch sugere que ela seja auto-semelhante.



Em cada passo, uma quarta parte da curva é semelhante à curva obtida no passo anterior, logo, não existe auto-semelhança nas curvas que se vão obtendo em cada passo. Contudo, pode-se prever a auto-semelhança na curva limite, embora uma demonstração fosse necessária para demonstrá-lo.

Fractais na natureza

Fenômenos como a variação do tempo, as ramificações dos brônquios, o traçado dos rios que formam uma bacia hidrográfica, a forma de uma cadeia de montanhas, a penetração de óleo em rochas porosas, a formação dos flocos de neve, ou a dinâmica das populações, pareciam totalmente aleatórios. Entretanto, ao estudar os fractais, cientistas e matemáticos notaram que alguns deles imitavam tais fenômenos. Com isso, ao invés de randômicos, estes sistemas passaram a ser considerados caóticos, ou seja, embora sujeitos a uma forma e ordem próprias, eles podem ser equacionados. Uma característica de um sistema caótico é que ele sempre mostra "sensibilidade às condições iniciais", isto é, qualquer perturbação no estado inicial do sistema, não importando quão pequena seja, levará rapidamente a uma grande diferença no estado final, fazendo com que a previsão do futuro torne-se muito difícil. Porém, compreendendo o comportamento caótico, muitas vezes é possível entender como o sistema se comportará como um todo ao longo do tempo.

Anexo I – Mandelbrot

Benoît Mandelbrot nasceu na Polónia em 1924, a sua família emigrou para França, devido à 2ª GM. Tinha um tio, Szolem Mandelbrot, que era professor de Matemática no “Collège de France” e era o responsável pela sua educação.

Benoît freqüentou o “Lycze Rolin” em Paris, depois estudou em Lyon, e, mais tarde, foi para os Estados Unidos da América. Por fim estudou na École Polytechnique e na Sorbonne, em Paris e no Instituto Californiano de Tecnologia. A sua carreira acadêmica dividiu-se principalmente entre França e os EUA.

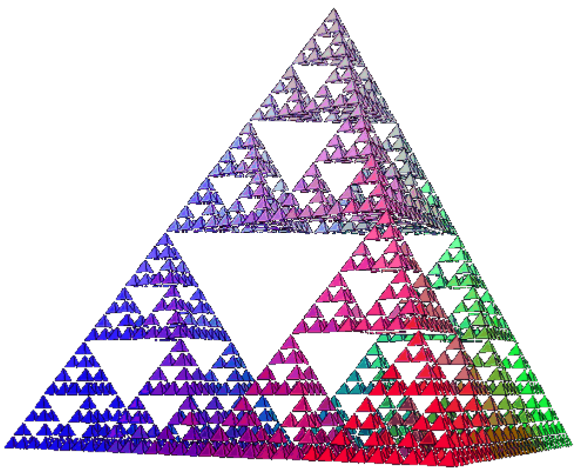
Em 1958 criou uma Associação com os laboratórios de investigação da IBM em Nova Iorque. Em 1987, tornou-se professor em Yale.

Mandelbrot, começou a ficar um pouco insatisfeito em relação à Geometria Clássica, uma vez, que ao explorar e resolver diversos problemas, os pontos, as linhas retas, os círculos, entre outros, não demonstraram ser abstrações adequadas para compreender a complexidade da natureza.

A pesquisa de Mandelbrot forneceu teorias matemáticas para o fenômeno da probabilidade errática e métodos de auto-semelhanças em probabilidades. Levou a cabo uma pesquisa sobre processos esporádicos, termodinâmica, linguagens naturais, astronomia, geomorfologia, gráficos e arte com a ajuda do computador e criou e desenvolveu a geometria fractal.

Este prodigioso e ilustre matemático contemporâneo é conhecido mundialmente como sendo o único responsável pelo enorme interesse nos chamados objetos fractais. Hoje em dia a sua geometria é conhecida através de bonitas gravuras coloridas que, enriqueceram tanto a matemática moderna como a arte.

Anexo II – O triângulo de Sierpinsky



O triângulo de Sierpinsky foi descoberto pelo matemático Waclav Sierpinsky (1882-1969)

É obtido através de um processo interativo de divisão de um triângulo eqüilátero em quatro triângulos semelhantes.

Visto um destes quatro triângulos estar invertido (em relação ao original), é retirado do triângulo original, sobrando apenas os outros três.

Repete-se no passo seguinte o mesmo procedimento em cada um dos três novos triângulos com a orientação original, e assim sucessivamente.

O fractal obtido é estritamente auto-semelhante, ou seja, as partes da figura são cópias reduzidas de toda a figura, apresentam uma beleza e harmonia ímpar.

Pode-se generalizar o triângulo de Sierpinsky para uma terceira dimensão, obtendo-se assim a pirâmide de Sierpinsky.

Anexo III – O conjunto de Mandelbrot

Uma eternidade não seria tempo suficiente para conseguirmos observar todo este fractal, com os seus discos enfeitados com extremidades espinhosas, as suas espirais e filamentos enrolando-se em todas as direções, exibindo volumosas moléculas infinitamente variadas.

Se examinarmos a cor do conjunto de Mandelbrot através da janela ajustável dum écran de computador, vemos que é muito rica a sua complicação ao longo das diversas escalas. Uma catalogação das diferentes imagens no seu interior ou uma descrição numérica no seu contorno iria exigir uma quantidade infinita de informação.

O conjunto de Mandelbrot é obtido quando submetemos os números complexos (números do tipo a + ib, em que, a e b são números reais e i é a constante imaginária) a um processo iterativo.

Ao aplicar este processo repetidamente, obtemos uma seqüência de números um, cuja distância ao 0 (ou seja, o módulo |um|) se mantém finita ou tende para infinito.

É esta fronteira, entre o finito e o infinito que delimita o conjunto de Mandelbrot.

Como se constrói o Conjunto de Mandelbrot?

Para responder a esta pergunta, basta explicar como se atribui a cor a um número complexo a + ib qualquer, que vai ser desenhado como um ponto (a, b) no plano.

Vamos denotar por z o número anterior (a + ib).

Submete-se o número z ao seguinte processo iterativo:

$$z_{n+1} = z_n^{\ 2} + w$$

Em que w é um número complexo constante.

Observando o comportamento de zn+1, ou seja, do seu módulo |zn+1|, temos as seguintes possibilidades:

|zn| se mantém sempre finito - Atribui-se a cor preta a z.

|zn| tende para infinito - Atribuem-se diferentes cores a z, dependendo do comportamento de |zn|. A classificação é definida por quem desenha o fractal.

Um ponto é marcado neste fractal não quando satisfaz a equação, mas sim segundo certo tipo de comportamento. Um comportamento possível pode ser um estado estacionário; outro pode ser a convergência para uma repetição periódica de estados; e outro ainda pode ser uma corrida descontrolada para o infinito.

Este comportamento de convergência para uma repetição periódica de estados é passível de ser observada e, depois, todos nos podemos interrogar se o resultado é infinito ou não.

Este comportamento assemelha-se ao processo de feedback no mundo do dia-a-dia. Pode imaginar-se que estamos a montar um microfone, amplificador e colunas de som num auditório - estamos preocupados com o ruído estridente de feedback acústico. Se o microfone capta um som suficientemente alto, o som amplificado vindo das colunas irá entrar de novo no microfone num ciclo infinito, com um som cada vez mais elevado. Por outro lado, se o som é baixo irá apenas desaparecendo, até deixar de ser ouvido. Para construir um modelo para este processo de feedback poderíamos escolher um número inicial, multiplicá-lo por si mesmo, multiplicar o resultado por si mesmo, e assim sucessivamente, Iríamos descobrir que os grandes números conduzem rapidamente ao infinito: 10, 100,10000... Mas os números

pequenos levam a zero

Bibliografia

http://www.forum-global.de/bm/fractais.htm

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/